高１・高２ ハイレベル数学Ⅱを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ 高１・高２ハイレベル数学Ⅱの講座へ。この講座は

「基本問題だけではなく，応用問題を自力で解けるようになりたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅱでは，高校数学の根幹とも言える内容を学習します。この講座では，それまでに学び，また標準的な問題を解くことで自分のものになったはずの知識・技能を振り返りながら，その活用の仕方を，問題を通じてじっくり深く学んでいきます。

この講座を受講いただくことで，知識・技能のもつ意味や，その使い方，使う場面を体験することができます。また，なぜそういった手法を取るのか，それによって何が解決できるのか，を学ぶことで，解法に対する納得感が高まります。そのため，解法を丸暗記する必要がなく，さらに，今後の学習で出会う様々な問題の中で広く使える数学的な見方・考え方が身についていきます。この講座を通じて数学Ⅱと新たな気持ちで向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業をしています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことなんだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に学んだ知識・技能や解法の一部または全部を使うことで，その真意がわかる，というのも数学ならではですし，気になった時点で前に戻り，改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です。

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　式と証明

第１講　式と計算
PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解
PART2　二項定理
PART3　分数式の計算

第２講　命題と証明
PART1　恒等式，等式の証明
PART2　不等式の証明
PART3　相加平均と相乗平均

第２章　複素数と方程式

第３講　命題と証明
PART1　複素数と式の値，解と係数の関係
PART2　３次方程式の解から係数の決定
PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

第３章　図形と方程式

第４講　点と直線
PART1　２直線の交点を通る直線
PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値
PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

第５講　円
PART1　円と直線，円の弦の長さ
PART2　円の接線，２円の交点を通る図形
PART3　２円の位置関係，２円の共通弦

第６講　軌跡
PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡
PART2　動点と軌跡
PART3　放物線の弦の中点の軌跡

第７講　領域
PART1　領域を利用した証明
PART2　領域と最大・最小
PART3　正領域・負領域

第４章　三角関数

第８講　三角関数のグラフ，方程式・不等式
PART1　三角関数のグラフ
PART2　三角関数を含む方程式・不等式
PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

第９講　加法定理
PART1　三角関数を含む方程式・不等式（２倍角の公式）
PART2　三角関数の媒介変数表示
PART3　３倍角の公式とその利用

第10講　三角関数の合成と最大・最小
PART1　三角関数の最大・最小（合成）
PART2　三角関数の最大・最小（$t=\sin\theta-\cos\theta$）
PART3　三角関数の最大・最小（２倍角・半角の公式）

第５章　指数関数・対数関数

第11講　指数の拡張，指数関数
PART1　指数の計算と式の値
PART2　指数関数を含む方程式・不等式
PART3　累乗根の大小，指数関数の最大・最小

第12講　対数とその性質，対数関数
PART1　対数の計算と式の値
PART2　対数関数を含む方程式・不等式
PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

第13講　指数・対数関数の様々な問題
PART1　指数・対数と式の値
PART2　常用対数
PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

第６章　微分法・積分法

第14講　微分係数と導関数
PART1　平均変化率と微分係数
PART2　接線の方程式
PART3　共通接線

第15講　導関数の応用
PART1　関数の極大・極小
PART2　絶対値を含む関数のグラフ
PART3　３次関数の最大・最小

第16講　方程式・不等式への応用
PART1　高次方程式の実数解の個数
PART2　３本の接線が引けるための条件
PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

第17講　不定積分，定積分
PART1　定積分の性質
PART2　絶対値を含む関数の定積分
PART3　定積分で表された関数の決定

第18講　定積分と面積
PART1　放物線と x 軸の間の面積
PART2　３次関数のグラフと x 軸の間の面積
PART3　変数を含む定積分の最大・最小

第19講　２曲線と面積
PART1　曲線と接線の間の面積
PART2　面積を２等分
PART3　面積の最大・最小

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力をつけていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに３つのPART(セクション)に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「講義問題」(1，2など)

⇒　そのPARTで学ぶべき内容を含んだ問題。

PARTによっては，1[1]，1[2]のように分かれている場合もあります。

「Point Pickup」

⇒　「講義問題」を解くために必要な知識・技能や考え方，方針を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。「講義問題」の予習は必要ありませんが，あらかじめ自分で解けるところまで解いてから，「動画」を見ても構いません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，１つまたは複数のチャプターに分かれています。

(例)　第１講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解　…　【講義問題1】

PART2　二項定理　…　【講義問題2[1]】・【講義問題2[2]】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【講義問題】のチャプターで，講義問題を解く上で必要な知識，用語，公式等を「Point Pickup」を交えながら説明します。その後，講義問題を解説していきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一時停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書

いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵　解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照し，また必要に応じて講義問題の動画を見直し，どこに手が止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。最後まで解ききったら，自分で書いた解答を最初から最後まで読み，その流れを把握することをオススメいたします。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「講義問題＆ Point Pickup を通じて学ぶ」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分程度の受講時間となります。

各講に含まれる３つの PART の受講が終了すると, その講が終了します。時間がない時は, PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

- **「新しい知識や考え方，その使い方や場面を知って，思考の幅を広げる」**
- **「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**
- **「問題が解けるようになることがゴールではなく，なぜそう解くのかを学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，応用問題から学んだ経験が少ない人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。ですが，安心してください。この講座は，好きなところで動画を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味をもつのかを考えること，必要なら戻って何度も再生すること。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう 1 つ大切なこと，それは

- **「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

だと言うことです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気づいていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

　　・この講(PART)から何を知ったか，何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

　　・このPARTを受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。学んだ記憶がよみがえるはずです。

　　・「復習することで，学びを実感し，学びを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①〜③が終わると，自分がそのPARTの内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各PARTの終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，そのPARTで学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

　　・「問題を解くことで，知識を引き出し，それを活用する練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら，自覚しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まります。これは今後，数学Ⅱを活用するための貴重な経験としてあなたに刻まれていきます。

受講を続ける上で大切なのは

　　・ペースを作り，守る

ことです。各PART，およそ15分〜30分。それを，どの曜日のどの時間帯に何PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。あなたが学校で時間割に沿って授業を受けるのと同じように，まずはあなたのスケジュールに『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅱと本気

で向き合う時間，これを組みこんでください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気づき，それが「自信」につながります。

この「高１・高２ ハイレベル数学Ⅱ」は，これまでの学習や問題演習で培った知識・技能を活用する方法や場面を経験するための講座ですが，ご紹介できているのはその方法や場面のほんの一部となります。受講後は，**「高１・高２ トップレベル数学ⅠAⅡB＋C(ベクトル)」**に進んでみてください。自分のもっている知識に，さらにこんな使い方があるのか，という気づきが得られ，その気づきにより，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に拡がる数学Ⅱの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

【MEMO】

第 1 講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解

1　(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを示せ。

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$ を因数分解せよ。

Point Pickup

3 次式の展開の公式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

この式と，3 次式の因数分解の公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を用いることで，

$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解することができる。

第 1 講　PART1　確認問題

1 次の等式を証明せよ。

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

（証明）

$(a+b)^3=a^3+\boxed{ア}a^2b+\boxed{イ}ab^2+b^3$ であるから

$$a^3+b^3=(a+b)^{\boxed{ウ}}-\boxed{ア}a^2b-\boxed{イ}ab^2$$

$$=(a+b)^{\boxed{ウ}}-\boxed{エ}ab(a+b)$$

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

2 $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3-\boxed{オ}ab(a+b)+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3+c^3-\boxed{オ}ab(a+b)-3abc$$

$$=\{(a+b)+c\}\{\boxed{カ}\}-3ab(\boxed{キ})$$

$$=(\boxed{ク})(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-\boxed{ケ}ab)$$

$$=(\boxed{ク})(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

[$\boxed{カ}$ の選択肢]

① $(a+b)^2+(a+b)c+c^2$

② $(a+b)^2+(a+b)c-c^2$

③ $(a+b)^2-(a+b)c+c^2$

④ $(a+b)^2-(a+b)c-c^2$

[$\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$ の選択肢]

① $a+b+c$　　② $a+b-c$

③ $a-b+c$　　④ $a-b-c$

3 $x^3+27y^3-1+9xy$ を因数分解せよ。

$$x^3+27y^3-1+9xy$$

$$=(x+\boxed{コ}y-\boxed{サ})(x^2-\boxed{シ}xy+\boxed{ス}y^2$$

$$+x+\boxed{セ}y+\boxed{ソ})$$

【MEMO】

第 1 講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解

1　(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを示せ。

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$ を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$

$=x^3+(2y)^3+(-3)^3-3x\cdot 2y\cdot(-3)$

$=(x+2y-3)\{x^2+(2y)^2+(-3)^2-x\cdot 2y-2y\cdot(-3)-(-3)\cdot x\}$

$=(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy+6y+3x)$

$=(x+2y-3)(x^2-2xy+4y^2+3x+6y+9)$

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3，ウ：3，エ：3

[解説]

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ であるから [A]

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

> [A]　3 次式の展開
> $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2

[正解] オ：3，カ：③，キ：①，ク：①，ケ：3

[解説]

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \quad \text{[B]}$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\} \quad \text{[C]}$$
$$-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

> [B]　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

> [C]　3 次式の因数分解
> $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

3

[正解] コ：3，サ：1，シ：3，ス：9，セ：3，ソ：1

[解説]

$$x^3+27y^3-1+9xy$$
$$=x^3+(3y)^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot 3y\cdot(-1)$$
$$=(x+3y-1)\{x^2+(3y)^2+(-1)^2-x\cdot 3y \quad \text{[D]}$$
$$-3y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\}$$
$$=(x+3y-1)(x^2+9y^2+1-3xy+3y+x)$$
$$=(x+3y-1)(x^2-3xy+9y^2+x+3y+1)$$

> [D]　3 次式の因数分解
> $a^3+b^3+c^3-3abc$
> $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc$
> $-ca)$